AI-1210

B. A./B. Sc. (Part-III)

Term End Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : Second

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : *प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Note : *Solve any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.*

इकाई–I

Unit-I

1. (a) किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$ सदैव G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

The centre $Z(G)$ of a group G is always G normal subgroup of G.

(b) परिमित समूह के लिए काशी के प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for Abelian group.

(c) यदि $\circ(G) = 56$, सिद्ध कीजिए कि G, 1 या 8, 7 सिलो उपसमूह रखता है। अंत्य की स्थिति में सिद्ध कीजिए कि G एक प्रसामान्य 2–सिलो उपसमूह रखता है।

If $\circ(G) = 56$, prove that G has 1 or 8, 7-Sylow subgroups. In the latter case prove that G has a normal 2-Sylow subgroup.

इकाई–II

Unit-II

2. (a) दर्शाइये कि एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग (विभाग वलय) से तुल्यकारी है।

Show that every Homomorphic image of a ring is isomorphic to its quotient ring.

(b) अवशेष वर्ग माड्यूलो 5 के क्षेत्र पर निम्न बहुपदों का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक (g.c.d.) ज्ञात कीजिए

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 4$

और इसे दो एकघाती पदों के रूप में व्यक्त कीजिए।

Find the g.c.d. of the following polynomials under modulo 5,

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ and $g(x) = x^2 + 4$

and express it as a linear combination of two polynomials.

(c) किसी समाकारिता के लिए Ker f को परिभाषित कीजिए। मान लो $f: M \to N$ एक R-माड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R-माड्यूल N की एक R-समाकारिता है तथा Ker f, M का एक R-उपमाड्यूल होता है।

Define Kernel of a Homomorphism. Let $f: M \to N$ be an R-homomorphism of an R-module M into an R-module N. Then the Ker f is an R-submodule of M.

इकाई–III

Unit-III

3. (a) सदिश समष्टि $V(F)$ का अरिक्त उपसमुच्चय W सदिश उपसमष्टि होगा, यदि और केवल यदि $a, b \in F$ तथा $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

The non empty subset W of a vector space $V(F)$ is a vector-subspace, if and only if $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

(b) किसी सदिश समष्टि का आधार को परिभाषित कीजिए एवं दर्शाइये कि सदिश $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$ और $\alpha_3 = (0, -3, 2)$, R^3 के लिए आधार निर्मित करता है।

Define basis of vector space and prove that the vectors $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$ and $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ form a basis of $V_3(R)$.

(c) यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है, तब

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W is a finite dimension vector subspace of vector space $V(F)$, the show that

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई-IV

Unit-IV

4. (a) R^3 पर T एक रैखिक संकारक है, जो निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ जहाँ $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (2, 1, 1)$ के सापेक्ष T आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be the linear operator on R^3 defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

What is the matrix of T in the ordered basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, where $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$ and $\alpha_3 = (2, 1, 1)$.

(b) जाति शून्यता प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Rank-Nullity thoerem.

(c) दर्शाइये कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the following matrix A are diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई-V

Unit-V

5. (a) किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में किन्हीं भी दो सदिशों α, β के लिए सिद्ध कीजिए कि—

$$|(\alpha, \beta)| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

In an inner product space $V(F)$, for any two vectors α, β prove that :

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

(b) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए—

(i) आन्तर गुणन संमष्टि

(ii) लाम्बिक सदिश

(iii) मानकित सदिश समष्टि

(iv) लाम्बिक समुच्चय

(v) प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय

Define the following :

(i) Inner product space

(ii) Orthogonal vector

(iii) Normed vector space

(iv) Orthogonal set

(v) Orthonormal set

(c) $V_4(R)$ के एक घाततः स्वतन्त्र सदिशों के समुच्चय $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ का प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय ज्ञात कीजिए। जहाँ

$\beta_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\beta_2 = (-1, 0, -1, 1)$ &

$\beta_3 = (0, -1, 1, 1)$

Orthonormalize the set of linearly independent vectors $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_4(R)$, where

$\beta_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\beta_2 = (-1, 0, -1, 1)$ &

$\beta_3 = (0, -1, 1, 1)$